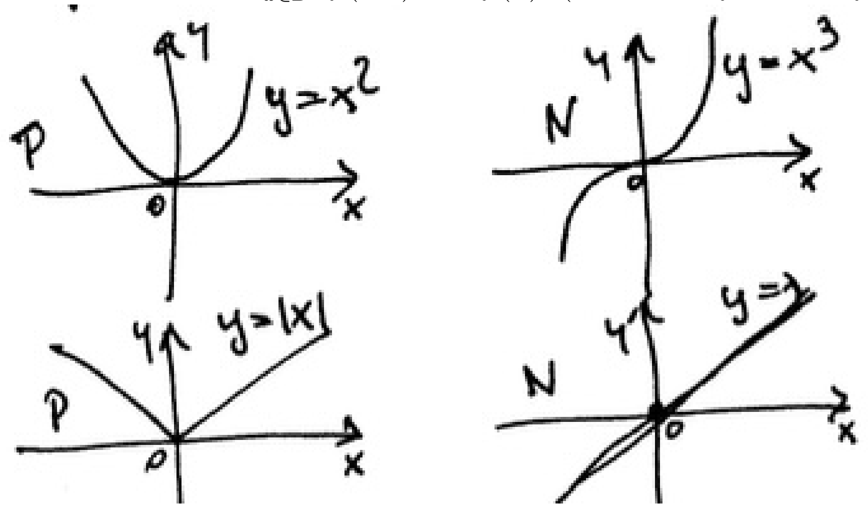
Funkcje parzyste i nieparzyste

Definicja 1
Funkcja $y = f(x)$ jest parzysta jeśli $\bigwedge\limits_{x\in D} f(x) = f(-x)$ (osią symetrii wykresu jest oś Oy).

Definicja 2
Funkcja $y = f(x)$ jest nieparzysta jeśli $\bigwedge\limits_{x\in D} f(x) = -f(-x)$.
Lub równoważnie $\bigwedge_{x\in D} f(-x) = -f(x)$. (Punktem symetrri wykresu jest punkt $(0, 0)$).



P na powyższym rysunku oznacza funkcję parzystą a N funkcję nieparzystą.

Ciągi liczbowe

Definicja 3
Ciągiem liczbowym nazywamy funkcję $a_n \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Przykłady

1. $a_n = \frac{1}{n}$ jest to ciąg postaci: $1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \ldots$

2. $a_n = \frac{n+1}{n}$ jest ciągiem postaci: $2\ \frac{3}{2}\ \frac{4}{3}\ \ldots$

Monotoniczność ciągów

1. $\{a_n\}$jest malejący jeśli $\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n > a_{n+1}$
2. $\{a_n\}$jest nierosnący jeśli $\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n \geqslant a_{n+1}$
3. $\{a_n\}$ jest rosnący jeśli $\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n < a_{n+1}$
4. $\{a_n\}$jest niemalejący jeśli $\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n \leqslant a_{n+1}$

Granica ciągu liczbowego

Definicja 4

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{N_\varepsilon} \bigwedge_{n>N_\varepsilon} |a_n - g| < \varepsilon$$

Przykład

Zastosujemy definicję granicy ciągu do wykazania, że granicą ciągu $a_n = \frac{1}{n}$ jest liczba 0 czyli, że:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Dowód

Niech będzie $\varepsilon > 0$. Szukamy takiego N_ε aby dla $n > N_\varepsilon$ było $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$.
Jeśli ma być $\frac{1}{n} < \varepsilon$, to mamy $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Ponieważ $n \in \mathbb{N}$, to przyjmujemy $N_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$.

Obliczmy granicę $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$.
Mamy $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$
Czyli $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{2}{3}$, $\ldots$ $a_{50} = \frac{50}{51}$, $\ldots$ $a_{100} = \frac{100}{101}$
Widać, że im większy numer wyrazu ciągu, tym wartość jest bliższa jedności.

Udowodnimy, że:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Dowód

Niech będzie dane $\varepsilon > 0$. Szukamy N_ε takiego, by $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$ dla wszystkich $n > N_\varepsilon$.
Mamy $\left|\frac{n}{n+1}\right| = \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$.
Stąd z $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ wynika, że $n + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$ zatem $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$.
Ponieważ $n \in \mathbb{N}$, więc przyjmujemy $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 - 1 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

Obliczanie granic wyrażeń postaci $\frac{W_1(n)}{W_2(n)}$

Przez $W(x)$ rozumiemy wyrażenie:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

czyli wielomian n-tego stopnia względem zmiennej n.

Przykłady

$$1.\ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

$$2.\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{3}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n^2}} = 1$$

$$3.\ \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+7}{3n^2+11} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\frac{n^2}{n^2}+\frac{7}{n^2}}{3\frac{n^2}{n^2}+\frac{11}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{7}{n^2}}{3+\frac{11}{n^2}} = \frac{2}{3}$$

Fakt 1

Ciąg $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący i ograniczony. Posiada on granicę e. To znaczy:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Zachodzi także ogólniejszy związek:

$$\lim_{a_n\to\infty} \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

Twierdzenie 1

Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny, tzn. posiada granicę.

Na podstawie twierdzenia pierwszego łatwo wykazać, że ciąg $a_n = \frac{1}{n}$ posiada granicę bo jest malejący i ograniczony przez zero z dołu. Podobnie łatwo wykazać, że ciąg $a_n = \frac{n}{n+1}$ posiada granicę bo jest rosnący i ograniczony z góry przez jedynkę. Zatem na mocy twierdzenia 1 oba te ciągi są zbieżne.

Arytmetyka granic ciągów

$$\lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n)$$
$$(\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n b_n)$$
$$\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_b} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \text{ jeśli } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

Granica funkcji w punkcie

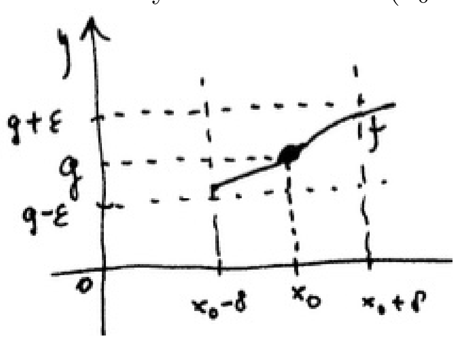
Definicja 5 (Cauchy)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \iff \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta_\varepsilon} \bigwedge_{x} |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-g|<\varepsilon$$

Definicja 6 (Heine)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \iff \bigwedge_{x_n\in D_f} x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n)\to g$$

Dla dowolnych wartości $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ wartość funkcji $f(x) \in (g-\varepsilon, g+\varepsilon)$



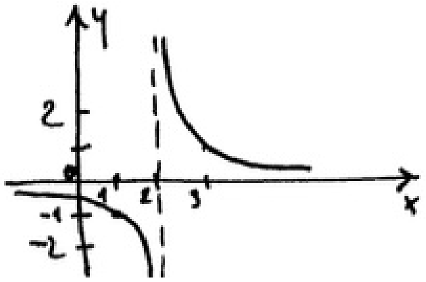
Przykład
$\lim\limits_{x\to 1}(2x+5) = 2*1+5 = 7$

Wyrażenie $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ typu $\left[\frac{0}{0}\right]$ obliczamy następująco:

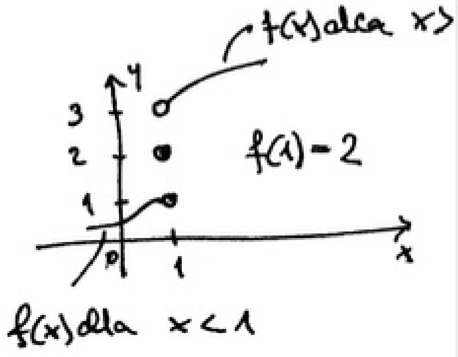
$$\lim_{x\to 11}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

Granice typu $\left[\frac{1}{0}\right]$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2} = -\infty$$



Funkcja jest określona jak pokazuje rysunek:

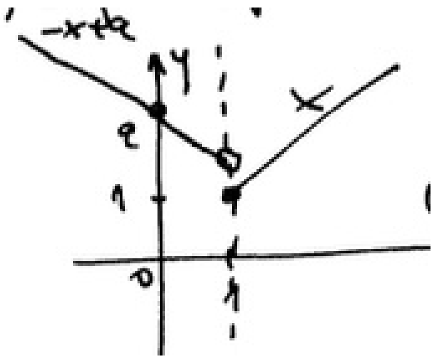


Wtedy $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$ zaś $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3$. Zatem granica nie istnieje, bo granica lewostronna ma inną wartość niż granica prawostronna. (Przy okazji funkcja nie jest ciągła w punkcie 1.

Ciągłość funkcji w punkcie

Definicja 7
Funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy jest określona w tym punkcie (czyli ma wartość dla x_0) oraz granica w tym punkcie istnieje i jest równa wartości funkcji. Inaczej mówiąc istnieje $f(x_0)$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Zadanie
Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x \geqslant 1 \\ -x+a & \text{dla} \quad x < 1 \end{cases}$
Dla jakiej wartości a funkcja f jest ciągła w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$?



Widać z rysunku, że ciągłość będzie dla każdego $x \in \mathbb{R}$ gdy $-x+a$ dla $x=1$ będzie miało wartość 1. Czyli $-1+a=1$, skąd $a=1$.

Jakie funkcje są ciągłe?

a) Wielomiany dowolnego stopnia (liniowe, kwadratowe itd.)
b) funkcje trygonometryczne $\sin x$ i $\cos x$
c) funkcja $\log x$ i a^x
d) $\sqrt{x}$

Pochodna funkcji w punkcie

Definicja 8
Pochodną funkcji $f(x)$ w punkcie $x = x_0$ nazywamy granicę (ilorazu różnicowego)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Czasem można w literaturze spotkać innę sformułowanie postaci ilorazu różnicowego np:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Albo jeszcze inna postać gdzie zamiast h mamy Δx. Wtedy mamy postać:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Wzory na pochodne funkcji

1. $(c)' = 0$
2. $(x)' = 1$
3. $(x^2)' = 2x$
4. $(x^n)' = nx^{n-1}$
5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
6. $(e^x)' = e^x$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = \sin x$
9. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
10. $(a^x)' = a^x \ln a$
11. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
12. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
13. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
14. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

Podstawowe własności pochodnych

1. $(cf(x))' = cf'(x)$

2. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

3. $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

4. $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

5. $[f(g(x))]' = f'(g(x)g'(x)$

Przykłady obliczania pochodnych

1. Niech $f(x) = 2x + 5$, wtedy $f'(x) = 2$, bo $(2x + 5)' = (2x)' + (5)' = 2(x)' + (5)' = 2 * 1 + 0 = 2$

2. Wykazać z definicji pochodnej funkcji, że $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Obliczamy granicę ilorazu różnicowego:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} =$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

3. Niech $f(x) = xe^x$, wtedy $f'(x) = (x)'e^x + x(e^x)' = 1e^x + xe^x = e^x(1 + x)$